Paris 17 octobre 2025

# Le faisceau BPS pour les algèbres préprojectives

(en partie en commun avec Davison, Schlegel Mejia)

**But**

$Q$ carquois

$\Pi_Q$ algèbre préprojective

$\mathcal{BPS}_{\Pi_Q}$ est un faisceau pervers semisimple sur $\mathcal{M}_{\Pi_Q}$ = espace de modules de $\Pi_Q$-reps.

→ décrire les supports et les systèmes locaux des facteurs de $\mathcal{BPS}_{\Pi_Q}$.

① Carquois avec potentiel et algèbre de Jacobi

② Algèbres préprojectives

③ Faisceau BPS et algèbre de Hall cohomologique

④ Le faisceau BPS pour les algèbres préprojectives par générateurs et relations

⑤ Faisceau BPS pour les variété hypertoriques

⑥ Ngô strings

① $Q=(Q_0,Q_1)$ carquois 2-cycles, boucles permis [⚠ algèbres amassées]

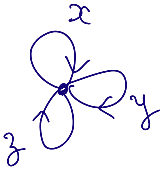
$\mathbb{C}Q$ algèbre des chemins

$W \in \mathbb{C}Q$ combinaison de cycles dans $Q$

$\frac{\partial W}{\partial a}$ pour $a \in Q_1$ dérivées cycliques.

$$\frac{\partial \overbrace{a_1 \cdots a_r}^{\text{mot cyclique}}}{\partial a} = \sum_{i : a_i = a} a_{i+1} \cdots a_r a_1 \cdots a_{i-1}$$

$$\mathrm{Jac}(Q,W) = \mathbb{C}Q \Big/ \left\langle \frac{\partial W}{\partial a} : a \in Q_1 \right\rangle$$ algèbre de Jacobi

<u>exemple</u> $Q=$ 

$\mathbb{C}Q = \mathbb{C}\langle x, y, z\rangle$ n.c pol in 3 variables

$W = xyz - xzy$

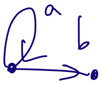
$$\frac{\partial W}{\partial x} = yz - zy, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = zx - xz, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = xy - yx$$

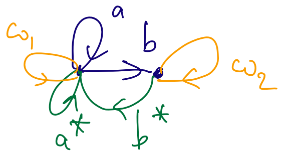
commutateurs

$\mathrm{Jac}(Q,W) = \mathbb{C}[x,y,z]$. algèbre 3CY.

Aujourd'hui $Q=(Q_0,Q_1)$ carquois

$\tilde{Q} = Q_0, Q_1 \sqcup Q_1^{op} \sqcup \underset{\text{boucle en } i}{\{\omega_i : i \in Q_0\}}$ carquois triple

$Q =$ 

$\rightsquigarrow$ $\tilde{Q} =$ 

$$W = \left(\sum_{i\in Q_0} \omega_i\right)\left(\sum_{a\in Q_1} [a,a^*]\right)$$

potentiel cubique canonique

ex: $Q =$ 

$\tilde{Q} =$ 

$W = x[y,z]$ .

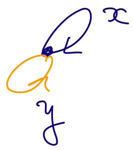
algèbre de Jacobi ≈ variété CY de dim 3 non commutative

② $Q$ carquois

$\overline{Q} = (Q_0, Q_1 \sqcup Q_1^{op})$ carquois double

$\rho = \sum_{a \in Q_1} [a, a^*]$ relation préprojective.

$\Pi_Q = \mathbb{C}\overline{Q} / \langle \rho \rangle$ algèbre préprojective.

**exemple:** $Q =$  $\rightsquigarrow \overline{Q} =$ 

$\rho = [x, y]$

$\mathbb{C}\overline{Q} = \mathbb{C}\langle x, y \rangle$

$\Pi_Q = \mathbb{C}[x, y]$ algèbre 2CY.

algèbre préprojective $\simeq$ variété CY de dim 2 non commutative.

**Fait calculatoire:** $\mathrm{Jac}(\tilde{Q}, W) \cong \Pi_Q[\omega]$ polynômes en $\omega$ à coefficients dans $\Pi_Q$.

**conséquence** $M$ rep of $\mathrm{Jac}(\tilde{Q}, W)$

$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \text{ rep of } \Pi_Q + \\ \omega \in \mathrm{End}_{\Pi_Q}(M) \end{array} \right\}$$

③ $Q$ carquois

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_Q = \bigsqcup_{d\in\mathbb{N}^{Q_0}} \mathfrak{M}_{Q,d} \arrow[d, "\begin{array}{c} JH_Q \\ \text{"semisimplification"} \end{array}"'] \\
\mathcal{M}_Q = \bigsqcup_{d\in\mathbb{N}^{Q_0}} \mathcal{M}_{Q,d}
\end{tikzcd}$$

champ des représentations de $Q$

$$\mathfrak{M}_{Q,d} = \underset{\substack{\| \\ X_{Q,d}}}{\prod_{a\in Q_1} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{d_{s(a)}}, \mathbb{C}^{d_{t(a)}})} \Big/ \underset{\substack{\| \\ GL_d}}{\prod_{i\in Q_0} GL_{d_i}}$$

espace de module grossier

$$\mathcal{M}_{Q,d} = X_{Q,d} /\!/ GL_d = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[X_{Q,d}]^{GL_d}\right)$$

$\mathbb{C}$-points $\overset{1:1}{\hookrightarrow}$ rep. semisimples de $Q$ de dimension $d$.

* $(Q, W)$ carquois à potentiel.

$\mathrm{Tr}(W) : \mathfrak{M}_Q \longrightarrow \mathbb{C}$ fonction

$\mathcal{M}_Q \longrightarrow \mathbb{C}$

différentielle $d\,\mathrm{Tr}(W)$ = section de $T^*\mathfrak{M}_Q$ champ cotangent

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}_{\mathrm{Jac}(Q,W)} \arrow[d, "\mathrm{JH}_{(Q,W)}"'] & = \operatorname{crit}(\operatorname{Tr}(W)) = \{ d\operatorname{Tr}(W) = 0 \} \\ \mathcal{M}_{\mathrm{Jac}(Q,W)} & \end{tikzcd}$$

lieu critique

espace de modules.

cet exposé : point de vue naïf mais lieu critique ⇝ structure (−1)-symplectique.

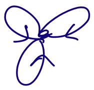
* $Q$ carquois

$\Pi_Q$ algèbre préprojective

$\rho : \mathfrak{M}_{\overline{Q},d} \longrightarrow \mathfrak{gl}_d$ application moment

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}_{\Pi_Q} \arrow[d, "\mathrm{JH}_{\Pi_Q}"'] & = \rho^{-1}(0) \\ \mathcal{M}_{\Pi_Q} & \end{tikzcd}$$

espace de modules.

<u>exemple</u> : $Q =$  $\overline{Q} =$  $\tilde{Q} =$ 

$$\mathfrak{M}_{\tilde{Q}} = \bigsqcup_{d \in \mathbb{N}} \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{C})^{\times 3} / GL_d$$

conjugaison diagonale

$$\mathfrak{M}_{\tilde{Q},W} = \bigsqcup_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_d^{(3)}(\mathbb{C}) / GL_d$$ champ commutant triple

$$\mathfrak{M}_{\Pi_Q} = \bigsqcup_{d\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_d^{(2)}(\mathbb{C}) / GL_d$$ champ commutant

$$\mathcal{C}_d^{(2)} = \{(A,B)\in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{C})^{\times 2} \mid AB = BA\}$$

$$\mathcal{C}^{(3)} = \left\{(A,B,C)\in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{C})^{\times 3} \;\middle|\; \begin{array}{l} AB = BA \\ BC = CB \\ AC = CA \end{array}\right\}$$

④ $(Q, W)$ carquois à potentiel

$\mathrm{Tr}(W) : \mathfrak{M}_Q \longrightarrow \mathbb{C}$ fonction régulière

$$\mathcal{DT}_{Q,W} := \underbrace{\varphi_{\mathrm{Tr}(W)}}_{\text{foncteur des cycles évanescents}} \mathbb{Q}^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{M}_Q} \in \mathrm{Perv}(\mathfrak{M}_Q)$$

"Donaldson-Thomas"

faisceau pervers

Théorème $Q$ symétrique

$$JH_{Q*}\mathcal{DT}_{Q,W} \in {}^p\mathcal{D}_c^{\geq 1}(\mathcal{M}_Q, \mathbb{Q})$$

Define $\mathcal{BPS}_{Q,W} = {}^p\mathcal{H}^1(JH_{Q*}\mathcal{DT}_{Q,W})$

faisceau pervers $\in \mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{Q,W})$

But de la théorie de DT cohomologique : obtenir la compréhension la plus fine possible de $\mathcal{BPS}_{Q,W}$.

En général : largement ouvert

Aujourd'hui : carquois triple à potentiel

**Théorème** : • $\mathcal{BPS}_{Q,W}[-1]$ a une structure d'algèbre de Lie

• $(\tilde{Q}, W)$ carquois triple

$\mathcal{BPS}_{\tilde{Q},W}$ est semisimple supporté sur $\mathcal{M}_{\Pi_Q} \times \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathcal{M}_{\tilde{Q}}$

et $\mathcal{BPS}_{\tilde{Q},W} \cong \mathcal{BPS}_{\Pi_Q} \boxtimes \mathbb{Q}_{\mathbb{A}^1}[1]$

où $\mathcal{BPS}_{\Pi_Q} \in \mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$ est un faisceau pervers.

• $\mathcal{BPS}_{\Pi_Q}$ a une structure d'algèbre de Lie

$$\mathcal{BPS}_{\tilde{Q},W} = \bigoplus \mathcal{IC}(Y, \mathcal{L}_Y)$$

$Y \subset \mathcal{M}_{\tilde{Q}}$
s. var loc fermée
lisse irréductible

système local
semisimple
sur $Y$.

⑤ $\mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$ a une structure monoïdale symétrique $\boxdot$

$$\mathcal{M}_{\Pi_Q} \times \mathcal{M}_{\Pi_Q} \xrightarrow{\oplus} \mathcal{M}_{\Pi_Q}$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$ $\quad \mathcal{F} \boxdot \mathcal{G} := \oplus_*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$.

$\mathcal{L}$ algèbre de Lie dans $\mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$ :

$c : \mathcal{L} \boxdot \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ $\quad$ antisymétrique
+ identité de Jacobi.

## Algèbre de Borcherds positive

$$\Sigma_{\Pi_Q} = \left\{ d \in \mathbb{N}^{Q_0} \;\middle|\; \text{il existe une rep. simple de } \Pi_Q \text{ de dimension } d \right\}$$

"racines simples primitives"

$$\Delta^+_{\Pi_Q} = \Sigma_{\Pi_Q} \sqcup \left\{ \ell d \;:\; \begin{array}{l} \ell \geq 2 \\ d \in \Sigma_{\Pi_Q} \\ (d,d)_Q = 0 \end{array} \right\}$$

"racines positives simples"

$$\begin{array}{rccc} \Delta_\ell : & \mathcal{M}_{\Pi_Q, d} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\Pi_Q, \ell d} \\ & x & \longmapsto & x^{\oplus \ell} \end{array}$$

$d \in \Sigma_{\Pi Q}$ $\quad \mathcal{G}_d = \mathcal{IC}(\mathcal{M}_{\Pi Q, d})$

$$\mathcal{G}_{ld} = (\Delta_{ld})_* \mathcal{IC}(\mathcal{M}_{\Pi Q, d})$$

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{d \in \Delta^+_{\Pi Q}} \mathcal{G}_d$$ générateur

$$\mathrm{Free}_{\mathrm{Lie}}(\mathcal{G}) \in \mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\Pi Q})$$

$(-,-)_Q : \mathbb{N}^{Q_0} \times \mathbb{N}^{Q_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$ forme d'Euler symétrisée

$$(d,e)_Q = 2 \sum_{i \in Q_0} d_i e_i - \sum_{a \in Q_1} \left[ d_{s(a)} e_{t(a)} + d_{t(a)} e_{s(a)} \right]$$

## Relations de Serre :

$$\mathrm{ad}(\mathcal{G}_d)^{1-(d,d')_Q}(\mathcal{G}_{d'})$$ si $(d,d)_Q = 2$

sous-objet de $\mathrm{Free}_{\mathrm{Lie}}(\mathcal{G})$ ou $(d,d')_Q = 0$

$$\mathfrak{n}^+_{\mathcal{G}} := \mathrm{Free}_{\mathrm{Lie}}(\mathcal{G}) \Big/ \text{rel de Serre}$$

**Théorème** (Davison - H- Schlegel Mejia . '23)

$$\boxed{\mathcal{BPS}_{\Pi Q} \cong \mathfrak{n}^+_{\mathcal{G}}}$$

iso d'algèbres de Lie dans $(\mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\Pi Q}), \boxdot)$

Cas plus simple:

Q totalement négatif $\left( (d,d')_Q < 0 \quad \forall d,d' \neq 0 \right)$

=> pas de relations

$$\boxed{\mathcal{BPS}_{\Pi_Q} \cong \mathrm{Free}_{Lie}(\mathcal{V})}$$

Maintenant : exploiter cette description pour écrire

$$\mathcal{BPS}_{\Pi_Q} \cong \bigoplus_{Y \subset \mathcal{M}_{\Pi_Q}} \mathcal{IC}(Y, \mathcal{L})$$

sous variété irréductible lisse localement fermée

système local sur $\mathcal{M}_{\Pi_Q}$

## ⑥ Algèbres de Lie libres

$F_n = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ pol. non commutatif en $n$ variables

$$\cup$$

$\mathcal{L}_n$ algèbre de Lie libre engendrée par $x_1, \dots, x_n$ (crochets itérés)

$[x_i; x_j]$, $[x_i, [x_j, x_k]], \dots$

graduation par $\mathbb{N}^n$ $\deg(x_i) = e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots 0)$

$\mathfrak{S}_n \curvearrowright F_n[1, \dots, 1]$ representation régulière de $\mathfrak{S}_n$.

$$\simeq \mathrm{Ind}_{\{1\}}^{\mathfrak{S}_n} 1$$

**Théorème** [Klyachko, Lie elements in the tensor algebra, 1974]

$$\mathcal{L}_n[(1, \dots, 1)] \simeq \mathrm{Ind}_{C_n}^{\mathfrak{S}_n}(\xi_n)$$

où $C_n \subset \mathfrak{S}_n$ sous-groupe cyclique maximal

$\xi_n$ caractère primitif de $C_n$.

En particulier, $\dim \mathcal{L}_n = \dfrac{\#\mathfrak{S}_n}{\#C_n} = (n-1)!$

ex: $n=2$ $[x_1, x_2]$

$n=3$ $[x_1, [x_2, x_3]]$ , $[x_2, [x_3, x_1]]$

$n$ arbitraire : mots de Lyndon, etc...
base de $\mathcal{L}_n$ ,

mots $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ ordre lexicographique

mot de Lyndon : strictement plus petit que toutes ses permutations cycliques.

$\mathcal{L}_n[(1, \dots, 1)]$ a une base donnée par les mots de Lyndon qui sont des permutations de $(x_1, \dots, x_n)$.

Garsia, Combinatorics of the Free Lie Algebra and the symmetric group, 1990

Lothaire, Combinatorics on words, 1983

Barcelo, On the action of the symmetric group on the Free Lie Algebra and the partition lattice.

## ⑦ Stratifications par le type semisimple

$$\mathcal{M}_{\Pi_Q} = \bigsqcup_{r\geqslant 0} \quad \bigsqcup_{D=(d_i,m_i)\in(\Sigma_{\Pi_Q}\times\mathbb{N}_{\geqslant 1})^r} \mathcal{M}_{\Pi_Q,D}$$

où $\mathcal{M}_{\Pi_Q,D}$ = rep semisimples de $\Pi_Q$ de la forme

$$\bigoplus_{j=1}^{r} S_j^{m_j} \qquad S_j \text{ 2 à 2 non isomorphes}$$

Si $m_i=1$ $\forall i$ : $\mathcal{M}_{\Pi_Q,D} := \mathcal{M}_{\Pi_Q,(d_1,\dots,d_r)}$

**Théorème** (H-2025)

$Q$ totalement négatif

$$\mathcal{BPS}_{\Pi_Q} \cong \bigoplus_{\underline{d}=(d_1,\dots,d_r)\in\Sigma^r_{\Pi_Q}} \mathcal{IE}(\mathcal{M}_{\Pi_Q,\underline{d}}, \mathcal{L}_D)$$

où $\mathcal{L}_D$ est le système local sur $\mathcal{M}_{\Pi_Q,D}$ donné par $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_{\underline{d}}}_{\mathfrak{S}_r}\, \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_r}_{G}\, \varepsilon_r$

(caractère primitif de $G_r$.

$\mathfrak{S}_{\underline{d}} \subset \mathfrak{S}_r$ sous-groupe préservant $\underline{d}$

Qu'en est-il du cas d'un carquois général, pas forcément totalement négatif ?

$Q$ carquois

$Q^{re}$ sous-carquois réel : effacer les sommets ayant des boucles

$\mathfrak{g}_{Q^{re}}$ algèbre de Kac-Moody.

**Théorème (H- 2025)**

$\mathcal{BPS}^{im}_{\Pi_Q}$ = sous-objet de $\mathcal{BPS}_{\Pi_Q}$ engendré par $\mathcal{G}_d$, $d \neq e_i$ $i \in Q_0^{re}$

$$\mathcal{BPS}_{\Pi_Q} \cong \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^{Q_0}} \mathcal{BPS}^{im}_{\Pi_Q,d} \otimes L_{(-,d)_Q}$$

$L_{(-,d)_Q}$ représentation irréductible de $\mathfrak{g}_{Q^{re}}$ de plus bas poids $(-,d)_Q$

et $$\mathcal{BPS}^{im}_{\Pi_Q} = \bigoplus_{D=(d_j,m_j)\in\Sigma_{\Pi_Q}\times\mathbb{N}_{\geq 1}} \mathcal{IC}(\mathcal{M}_{\Pi_Q,D}, \mathcal{L}_D)$$

$m_j = 1$ si $(d_j, d_j) < 0$
$d_j \neq e_i \quad i \in Q_0^{re}$ .

et $\mathcal{L}_D$ est le système local sur $\mathcal{M}_{\Pi_{Q},D}$ donné par une représentation de $\mathfrak{S}_D$ sur la cohomologie d'une variété hypertorique.

## Détermination de $\mathcal{L}_D$

$D = \{(d_j, m_j)\}_{1 \le j \le r}$

carquois Ext : $Q_D$ sommets $1 \le j \le r$, et pour $j < j'$ $(m_j d_j, m_{j'} d_{j'})$ sommets entre $j$ et $j'$.

Il existe une condition de stabilité $\theta$ telle que $\mathcal{M}^{\theta}_{\Pi_{Q_D}, \underbrace{(1,-,1)}_{\text{vecteur dimension}}}$ soit lisse : variété hypertorique

$\mathfrak{S}_D$ agit sur $H^*(\mathcal{M}^{\theta}_{\Pi_{Q_D}, \mathbb{1}})$ [indépendance de $H^*(\mathcal{M}^{\theta}_{\Pi_{Q_D}, \mathbb{1}})$ en $\theta$]

$\mathcal{L}_D$ est donné par $H^{\nearrow} (\mathcal{M}^{\theta}_{\Pi_{Q_D}, \mathbb{1}})$

dimension moitié

$$= \# \text{ arêtes } (Q_D) - \# \text{ sommets } (Q_D) + 1$$

---

**$L_{(-,d)_Q}$**

$$\mathfrak{g}_{Q^{re}} = \mathfrak{n}^-_{Q^{re}} \oplus \underset{\underset{\mathbb{Q}^{Q_0^{re}}}{\wr}}{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{n}^+_{Q^{re}}$$

décomposition triangulaire

$(-,d)_Q$ donne une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$.

$$\lambda : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

donc $\lambda : U(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ morphisme d'algèbres

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{b}^-) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\lambda"'] & U(\mathfrak{h}) \arrow[r] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

1-dim rep de $\mathfrak{b}^-$

$$M_{(-,d)_Q} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$$

module de Verma de plus bas poids $(-,d)_Q$

$\cup$ $\exists$ sous-module strict maximal $N_{(-,d)_Q}$

$$L_{(-,d)_Q} := M_{(-,d)_Q} / N_{(-,d)_Q}$$

quotient simple

$+$ $\mathbb{N}^{Q_0^{re}}$-graduation induite par le quotient $U(\mathfrak{n}^+_{Q^{re}}) \twoheadrightarrow L_{(-,d)_Q}$.

## Application : Système de Hitchin

$C$ courbe projective lisse

$r > 0$, $d \in \mathbb{Z}$

$$\left(\mathcal{F}, \theta : \mathcal{F} \xrightarrow[\mathcal{O}_C\text{-linéaire}]{} \mathcal{F} \otimes K_C\right) = \text{fibré de Higgs.}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{r,d}(C) = \text{esp. de module de fibrés de Higgs polystables de rang } r \text{ et degré } d \arrow[d, "h_{r,d}"'] \\ A_r = \prod_{i=1}^{r} H^0(C, K_C^{\otimes i}) \quad \text{base de Hitchin} \end{tikzcd}$$

$$(\mathcal{F}, \theta) \longrightarrow \left(\mathrm{Tr}(\Lambda^i \theta)\right)_{1 \leq i \leq r}$$

$=$ coefficients du polynôme car. de $\theta$.

$A_r$ paramétrise les courbes spectrales.

$A_r^{red} \subset A_r$ courbes spectrales réduites

Décrire $(h_{r,d})_* \mathcal{IC}(\mathcal{M}_{r,d}(C))\big|_{A_r^{red}}$

$g(C) > 2$ $\bigoplus_{d/r = \mu} \mathrm{BPS}_{r,d}(C)$ est une algèbre de Lie libre.